**Модернизация алгоритма глобального градиента Тодини
для расчета сетей с критическим течением**

Корельштейн Л.Б. (ООО «НТП Трубопровод»)

Применение алгоритма глобального градиента (GGA) для решения задач потокораспределения в технологических трубопроводах подробно рассматривалось автором и его коллегами в ряде работ [1-4], и разработанная ООО «НТП Трубопровод» программа «Гидросистема» [5] успешно использует GGA для гидравлического и теплового расчета трубопроводных сетей как с однофазным (жидкость, газ), так и многофазным газо-жидкостным течением.

Однако в своем исходном виде GGA оказывается не применим к сетям с критическим или околокритическим течением (т.е. течением сжимаемой среды, в отдельных элементах трубопровода приближающимся или достигающим скорости звука). А между тем, расчет подобного течения является важной практической задачей для некоторых типов технологических трубопроводов – например трубопроводов систем аварийного сброса или трансферных трубопроводов, транспортирующих двухфазный газо-жидкостный продукт из печи в колонну. Проблемы такого течения рассматривались автором в работах [6-10]. Им также были установлены условия существования и единственности решения задачи потокораспределения для подобных течений [10].

В данной статье предлагается модифицированный алгоритм глобального градиента (MGGA), который, как можно надеяться, в сочетании с методом декомпозиции позволит решить данную проблему. Далее в данной статье ограничимся рассмотрением только гидравлической задачи, то есть будем считать второй (помимо давления) описывающий транспортируемый продукт термодинамический параметр (например температуру для изотермического течения, или полную энтальпию для адиабатического) фиксированным.

Напомним суть «классического» GGA.

Как известно, классическая задача потокораспределения теории гидравлических цепей записывается в виде

 $A^{T}P=F\left(X\right)$ (1)

$AX=Q$(2)

Где $A$ – матрица соединений узлов и ветвей, $X$ – вектор массовых расходов по ветвям, $Q$ – вектор внешних массовых притоков и отборов в узлах, $P$ – вектор узловых потенциалов (давлений), $F\left(X\right)$ – вектор-функция, каждый элемент которой является функцией потерь потенциала на ветвях.

Предполагается, что в части узлов заданы узловые давления (в одном или более узлах), а в оставшихся узлах – узловые притоки. Представив матрицы и вектора в (1), (2) в виде

$A=\left(\begin{matrix}A\_{1}\\A\_{0}\end{matrix}\right)$*,* $P=\left(\begin{matrix}P\_{1}\\P\_{0}\end{matrix}\right)$*,*$ Q=\left(\begin{matrix}Q\_{1}\\Q\_{0}\end{matrix}\right)$*,* (3)

где индекс 0 соответствует узлам с заданным потенциалом, а 1 – с заданным притоком, из (1), (2) получаем

 $A\_{1}^{T}P\_{1}=F\left(X\right)-A\_{0}^{T}P\_{0}$ (4)

$A\_{1}X=Q\_{1}$(5)

Алгоритм глобального градиента ищет решения нелинейной системы уравнений (4), (5), относительно $X$ и $P\_{1}$, не накладывая заранее никаких дополнительных условий на вектора $X$ и $P$ в виде системы уравнений (1) или его подмножества (отсюда название «глобальный»). На каждой итерации система (4), (5) линеаризуется в окрестности текущей итерации, и ищется решение линеаризованной системы. Учитывая, что

$F\left(X+∆X\right)≈F\left(X\right)+D\left(X\right)∆X$*, где* $D\left(X\right)=diag\left({∂f\_{j}}/{∂x\_{j}}\right)$(6)

Из (4),(5) и (6) вытекают уравнения GGA

 $P\_{1}^{(i+1)}=P\_{1}^{(i)}+M\left(X^{(i)}\right)^{-1}\left\{Q\_{1}-A\_{1}X^{(i)}-A\_{1}D\left(X^{(i)}\right)^{-1}\left[A^{T}P^{(i)}-F\left(X^{(i)}\right)\right]\right\}$ (7)

$X^{(i+1)}=X^{(i)}+D\left(X^{(i)}\right)^{-1}\left[A^{T}P^{(i+1)}-F\left(X^{(i)}\right)\right]$(8)

Где

$M\left(X\right)=A\_{1}D\left(X\right)^{-1}A\_{1}^{T}$(9)

матрица Максвелла – симметричная положительно определенная разряженная М-матрица с диагональным преобладанием [11], обращение которой в (7) может быть выполнено вычислительно эффективно.

Преимуществом GGA является его быстрая сходимость (сопоставимая с методом контурных расходов) в сочетании с отсутствием необходимости предварительного топологического анализа сети, а также слабая зависимость от начального приближения.

В реальных технологических трубопроводах функция потерь на ветвях $F\left(X\right)$ зависит не только от величины расхода, но и от величины узловых давлений [11]. Пока эта зависимость незначительная ($\left|{∂F}/{∂lnP}\right|\ll \left|{∂F}/{∂lnX}\right|$), GGA продолжает эффективно работать. Однако по мере приближения течения к критическому скорость сходимости GGA падает. Но хуже всего то, что итерации при этом все чаще начинают попадать в область, где значения функции потерь на ветвях не определены – некоторые ветви просто вообще не могут пропустить значение расхода, полученное на очередной итерации, при полученном узловом давлении в начальном узле ветви, поскольку величина этого расхода превышает критический.

Для того чтобы обойти эту проблему, предлагается несколько переформулировать уравнения гидравлической цепи, перейдя от расчетов ветвей «по потоку» к их расчету «против потока»

 $A\_{1}^{T}P\_{1}=F^{\*}\left(X, P\right)-A\_{0}^{T}P\_{0}$ (10)

$A\_{1}X=Q\_{1}$(11)

Где функция потерь на j-й ветви определена как функция расхода и давления в концевом узле ветви:$f\_{j}^{\*}\left(x\_{j},P\_{end}\right)=P\_{beg}\left(x\_{j},P\_{end}\right)-P\_{end}$. Расчет ветвей при заданном расходе и конечном давлении несколько сложнее проводить, но зато решение (кроме немногих экзотических случаев – например ветвей с большим перепадом высот при нисходящем двухфазном течении) всегда существует и ведет себя гладко.

Линеаризация функции $F^{\*}\left(X, P\right)$ имеет вид

 $F^{\*}\left(X+∆X, P+∆P\right)≈F^{\*}\left(X, P\right)+D\left(X,P\right)∆X+C\left(X,P\right)\left(A^{-}\right)^{T}∆P$ (12)

Где $A^{-}$ - матрица соединений, содержащая только величины -1 для входящих в узлы ветвей, а диагональные матрицы $C\left(X,P\right)$ и $D\left(X,P\right)$ рассчитываются по формулам

$c\_{ii}={1-∂P\_{beg}\left(x\_{j},P\_{end}\right)}/{∂P\_{end}}$*,* $d\_{ii}={∂P\_{beg}\left(x\_{j},P\_{end}\right)}/{∂x\_{j}}$(13)

Заметим, что $0\leq c\_{ii}\leq 1$ и имеет ясный физический смысл – показывает степень близости течения на ветви к критическому (величина 1 соответствует критическому течению на ветви, а 0 – случаю, когда потери на ветви не зависят от давления).

Подставляя (12) в (10), (11), получим следующие уравнения модифицированного метода GGA (MGGA)

 $P\_{1}^{(i+1)}=P\_{1}^{(i)}+M^{\*}\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)^{-1}\left\{Q\_{1}-A\_{1}X^{(i)}-A\_{1}D\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)^{-1}\left[A^{T}P^{(i)}-F^{\*}\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)\right]\right\}$ (14)

$X^{(i+1)}=X^{(i)}+D\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)^{-1}\left[A^{T}P^{(i+1)}-F^{\*}\left(X^{\left(i\right)},P^{\left(i\right)}\right)-C\left(X^{\left(i\right)},P^{\left(i\right)}\right)A\_{1}^{-T}dP\_{1}^{(i)}\right]$(15)

Где

 $dP\_{1}^{(i)}=M^{\*}\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)^{-1}\left\{Q\_{1}-A\_{1}X^{(i)}-A\_{1}D\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)^{-1}\left[A^{T}P^{(i)}-F^{\*}\left(X^{(i)},P^{(i)}\right)\right]\right\}$ (16)

и обобщенная матрица Максвелла

$M^{\*}\left(X,P\right)=A\_{1}D\left(X,P\right)^{-1}\left[A\_{1}^{T}-C\left(X,P\right)A\_{1}^{-T}\right]$(17)

При этом матрица $M^{\*}$ теряет симметричность, но по-прежнему является (в случаях, когда решение задачи потокораспределения единственно – см. [10]) разреженной невырожденной M-матрицей со слабым диагональным преобладанием.

Для предварительной проверки MGGA совместно с Федюниной Д.Д. была проведена серия вычислительных экспериментов на небольших гидравлических сетях. Моделировалось изотермическое течение идеального газа по трубам, в том числе при критическом течении (в этом случае функция $F^{\*}$ и ее производные вычисляются аналитически). Результаты экспериментов показали, что предложенный метод работает и сохраняет все свои преимущества – быструю сходимость и слабую зависимость от начального приближения. При этом в случае использования в качестве узловых потенциалов давлений, а не квадратов давлений (как это обычно делается при расчете газовых сетей) скорость сходимости даже выше. Последнее объясняется тем, что при критическом течении расход по ветви пропорционален давлению в начальном узле, а не квадрату давления.

В настоящее время ведется активная работа по реализации в программе Гидросистема общего случая расчета ветвей «против потока» (с возможным множественным критическим течением и полным вскипанием или конденсацией продукта). Одновременно планируются вычислительные эксперименты для сетей с адиабатическим течением газа (течением Fanno), с учетом результатов которых планируется реализация MGGA в программе Гидросистема.

Литература.

1. Корельштейн Л.Б., Пашенкова Е.С. Опыт использования метода глобального градиента при расчете установившегося изотермического течения жидкостей и газов в трубопроводах. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Новосибирск, «Наука», 2008, с.80-89.
2. Корельштейн Л.Б., Пашенкова Е.С. Опыт использования методов глобального градиента и декомпозиции при расчете установившегося неизотермического течения жидкостей и газов в трубопроводах. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Математическое моделирование и оптимизация. Новосибирск, «Наука, 2010, с.103-114.
3. Бабенко А.В., Гартман Т.Н. Корельштейн Л.Б. Расчет потокораспределения для двухфазного газожидкостного течения в промышленных разветвленных трубопроводах. Технологии нефти и газа, №3(80), 2012, с. 33-37.
4. Бабенко А. В. Расчет потокораспределения для двухфазного газо-жидкостного течения в промышленных разветвленных трубопроводах. Неизотермический случай // Технологии нефти и газа. 2013. №2. С. 53-59.
5. Юдовина Е.Ф., Пашенкова Е.С., Корельштейн Л.Б. Программный комплекс «Гидросистема» и его использование для гидравлических расчетов трубопроводных систем. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. Новосибирск, «Наука», 2015, с.438-446.
6. Корельштейн Л.Б. Расчет критического и околокритического течения реальных газов и двухфазных сред в трубах. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Математическое и компьютерное моделирование. Новосибирск, «Наука», 2014, с.55-66.
7. Корельштейн Л.Б. Приближенные уравнения течения Fanno реальных газов и двухфазных газожидкостных смесей. Трубопроводная арматура и оборудование. 2015, №4(79), с.82-83.
8. Leonid Korelshteyn. Choked and Near-Choked Real Gases and Two-Phase Flow Analysis of Discharge Piping. Proceedings of AIChE 2015 Spring Meeting and 11th Global Congress on Process Safety. 26-30 April 2015, Austin, TX, USA.
9. Корельштейн Л.Б. О некоторых проблемах расчета критического и околокритического течения реальных газов и газо-жидкостных смесей в трубопроводах. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Математические и компьютерные технологии интеллектуализации. Новосибирск, Наука, 2017. – с.39-50.
10. Корельштейн Л.Б. О гидравлических цепях с критическим течением. В книге: Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня - 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018, c.84-110.
11. Корельштейн Л.Б. Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями. В книге: Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня - 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018, c.55-83.