

УДК 518.5:622.692.4

К 100-летию В.Я. Хасилева

© 2013 г. НОВИЦКИЙ Н.Н.<sup>1</sup>

### РАСЧЕТ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ НА БАЗЕ ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИИ УЗЛОВЫМИ МОДЕЛЯМИ СЕКУЩИХ И ХОРД

Статья посвящена результатам исследования принципа линеаризации гидравлических цепей В.Я. Хасилева с целью его использования в новых направлениях. Впервые рассматриваются вопросы применения этого принципа для линеаризации “узловых” моделей потокораспределения, обеспечения большей универсальности методики линеаризации, разработки новых методов расчета потокораспределения. Приводятся описания нового метода секущих и нового метода хорд, а также численные примеры, иллюстрирующие их вычислительную эффективность.

**Введение.** При изучении свойств нелинейных гидравлических цепей (ГЦ) в рамках контурной модели потокораспределения В.Я. Хасилевым был разработан оригинальный метод линеаризации [1–3]. Метод позволяет, оперируя параметрами исходной ГЦ, получать линейную систему уравнений, решение которой, как правило, дает правильное направление потоков, а часто весьма точное их значение. Этот результат позволил решить проблему выбора начального приближения для расчета потокораспределения “ньютоновскими” методами (аналог метода контурных расходов) и имел самостоятельное значение для приближенного упрощения и понижения размерности моделей ГЦ (преобразования треугольника в звезду, эквивалентирования и др.)

Основная идея принципа линеаризации ГЦ, предложенного В.Я. Хасилевым, состоит в получении таких линейных уравнений, которые совпадают с исходными уравнениями потокораспределения в точках пересечения с осями координат (либо являющихся асимптотами для уравнений, не имеющих таких точек). Применительно к закрытой (без внешних отборов и притоков) ГЦ были разработаны конечные правила линеаризации контурных моделей ГЦ в координатах  $n$ -мерного вектора расходов на ветвях ( $x$ ), и в  $c$ -пространстве контурных расходов ( $x_c$ ), где  $c = n - m + 1$  — число главных контуров;  $m$ ,  $n$  — число узлов и ветвей ГЦ. В случае открытой (имеющей внешние притоки и отборы) ГЦ, ее схему следовало предварительно свести к циклической, причем предполагался выбор такой системы независимых контуров, чтобы каждый из них содержал как минимум одну активную ветвь.

В данной работе предпринята попытка использования этого принципа линеаризации в следующих новых направлениях: 1) линеаризация моделей потокораспределения в пространстве узловых давлений; 2) разработка универсальных способов линеаризации ГЦ (не зависящих от формы представления исходной модели потокораспределения, наличия или отсутствия расходов в узлах, выбора системы контуров и других факторов); 3) разработка новых методов расчета потокораспределения.

<sup>1</sup>Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск.

**Нелинейная модель узловых давлений и ее свойства.** Исходная “узловая” модель установившегося изотермического потокораспределения в ГЦ имеет вид

$$\bar{A}x = \bar{Q}; \quad (1)$$

$$\bar{A}^T \bar{P} = f(x), \quad (2)$$

где  $\bar{Q}$  –  $m$ -мерный вектор узловых расходов с элементами  $Q_j > 0$  для притоков,  $Q_j < 0$  для отборов и  $Q_j = 0$  для простых узлов соединения;  $\bar{P}$  –  $m$ -мерный вектор узловых давлений;  $\bar{A}$  – полная  $(m \times n)$ -матрица инциденций с элементами  $a_{ji} = 1(-1)$ , когда узел  $j$  является начальным (конечным) для ветви  $i$  и  $a_{ji} = 0$ , если ветвь  $i$  не инцидентна узлу  $j$ ;  $f(x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция с элементами  $f_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , отражающими законы изменения давления от расхода на ветвях ГЦ.

Понижение порядка системы (1), (2) к пространству узловых давлений можно обеспечить исключением вектора расходов в (1), выраженного из (2) как

$$x = \varphi(\bar{A}^T \bar{P}), \quad (3)$$

где  $\varphi$  – функция, обратная к  $f$ . В итоге получим систему уравнений

$$\bar{A}\varphi(\bar{A}^T \bar{P}) = \bar{Q}. \quad (4)$$

Для простоты изложения будем рассматривать каноническую задачу потокораспределения [3], когда вектор  $\bar{Q}$  известен и  $\sum_{j=1}^m Q_j = 0$ .

Отметим, что для пассивной ГЦ уравнение (4) может быть представлено в двух индексных формах записи. Первая имеет вид

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \varphi_i(P_{Hi}, P_{Ki}) = Q_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где  $P_{Hi}, P_{Ki}$  – давления в начале и конце  $i$ -й ветви. Например, пусть  $f_i(x_i) = s_i |x_i| x_i$ , тогда  $\varphi_i(P_{Hi}, P_{Ki}) = \sqrt{|P_{Hi} - P_{Ki}| / s_i} \cdot \text{sign}(P_{Hi} - P_{Ki})$ . В данном случае  $\varphi_i(P_{Hi} - P_{Ki}) = -\varphi_i(P_{Ki} - P_{Hi})$ . Обозначим  $I_j$  – множество ветвей, инцидентных узлу  $j$ ,  $i \setminus j$  – индекс узла, смежного узлу  $j$  через инцидентную ветвь  $i$ . Тогда

$$\varphi_i(P_{Hi}, P_{Ki}) = \varphi_i(P_j, P_{i \setminus j}) = \sum_{i \in I_j} \sqrt{|P_j - P_{i \setminus j}| / s_i} \cdot \text{sign}(P_j - P_{i \setminus j}) = Q_j,$$

откуда (5) можно представить во второй форме

$$\sum_{i \in I_j} \varphi_i(P_j - P_{i \setminus j}) = Q_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

То есть, для пассивной ГЦ (4) не зависит от первоначальной ориентации ветвей расчетной схемы (знаков элементов  $\bar{A}$ ). Для активных ветвей (например,  $f_i(x_i) = s_i |x_i| x_i - Y_i$ ) эта ориентация однозначна по физическим причинам. Таким образом, в записи (6) учитывается направление потока, а понятие ориентации ветви является избыточным.

Приведем пример геометрической интерпретации нелинейных уравнений (4) для простейшей пассивной трехузловой сети (рис. 1а). Каждое из этих уравнений здесь представляет собой трехмерную (в общем случае  $m$ -мерную) поверхность простран-

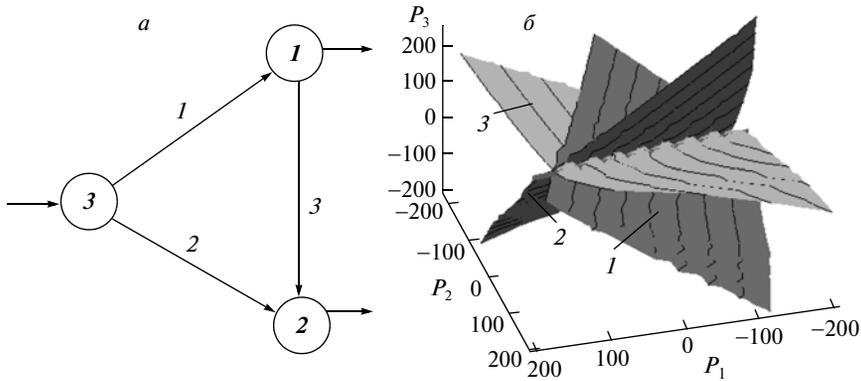


Рис. 1. Геометрическая интерпретация модели узловых давлений: *a* – схема ГЦ; *б* – графики уравнений модели узловых давлений; *1–3* – индекс узла (узловое уравнения)

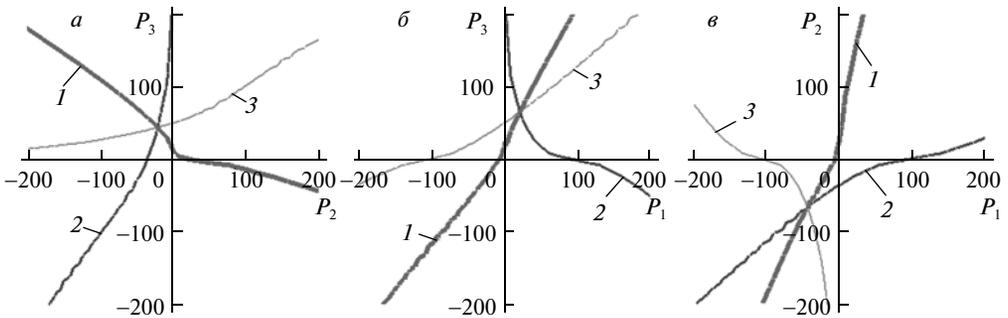


Рис. 2. Проекция узловых уравнений при фиксации базисного давления: *a* – в узле 1; *б* – в узле 2; *в* – в узле 3; *1–3* – индекс узлового уравнения

ства вектора  $\bar{P}$ . На рис. 1б приведена иллюстрация вида таких поверхностей при  $Q = \{-30; -60; 90\}$  и сопротивлениях ветвей  $\{0,01296; 0,0648; 0,02592\}$ . Пересечение этих поверхностей принадлежит прямой линии в трехмерном пространстве и образует множество решений относительно  $\bar{P}$ .

Однозначное решение имеется, когда хотя бы в одном узле давление задано. Координаты прямой, которой принадлежат все решения, удовлетворяют соотношению  $\bar{P} = \bar{P}^* + eP_k$ , где  $P_k$  – давление в  $k$ -м узле,  $\bar{P}^*$  – вектор решения при  $P_k^* = 0$ ,  $e$  –  $m$ -мерный единичный вектор.

На рис. 2 приведены проекции уравнений модели (4) на плоскость, соответственно при  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $P_3 = 0$ . Видно, что три уравнения во всех случаях пересекаются в одной точке, что является следствием линейной зависимости строк  $\bar{A}$ . Соответственно, одно из уравнений (1) (как и (4)) является лишним и может быть удалено. Таким образом,  $(m - 1)$ -мерный вектор  $P$  может быть найден из системы

$$A\varphi(A^T P) = Q, \quad (7)$$

где  $Q$  –  $(m - 1)$ -мерный вектор узловых расходов;  $A$  –  $(m - 1) \times n$ -матрица инцидентий.

Каждое  $j$ -е уравнение нелинейной модели (4) пересекает ось  $t$  пространства вектора  $\bar{P}$ , если существует ветвь, соединяющая узлы  $j$  и  $t$ . Формально, отрезки, отсекаемые всеми уравнениями на всех осях, должны удовлетворять системе уравнений

$$\bar{A}\varphi(\bar{A}^T \bar{p}_t) = \bar{Q}, \quad t = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где  $\bar{p}_t$  –  $m$ -мерный вектор с элементами  $p_{jt} = \text{var}$ ,  $j = t$  и  $p_{jt} = 0$ ,  $j \neq t$ . Практически решения этой системы не требуется, так как каждый из отрезков  $p_{jt}$  является аргументом только одного уравнения (8). Из (6) следует, что: 1)  $\sum_{i \in I_j} \varphi_i(p_{ij}) = Q_j$ ,  $j = t$ ;

2)  $\varphi_{(jt)}(-p_{jt}) = Q_j$ ,  $j \neq t$ ,  $(j, t) \in I$ ; 3)  $p_{jt} = \infty$ ,  $j \neq t$  и  $(j, t) \notin I$ , где  $I$  – множество всех ветвей ГЦ, знак  $\infty$  означает отсутствие точки пересечения.

Рассмотрим возможности получения явных (по крайней мере, в функциональном виде) выражений для  $p_{jt}$ . Так как  $\varphi_{(jt)} = f_{(jt)}^{-1}$ , то при  $j \neq t$   $p_{jt} = -f_{(jt)}(Q_j)$ . Случай  $j = t$  в терминах функций  $f_i$  равносильно решению задачи потокораспределения в системе параллельно соединенных ветвей с одним неизвестным давлением:

$$\sum_{i \in I_j} x_i = Q_j, \quad P_j \equiv p_{jj} = f_i(x_i) \quad \text{для } i \in I_j \quad \text{и} \quad P_t \equiv p_{jt} = 0 \quad \text{для } j \neq t, \quad (j, t) \in I_j.$$

Обозначим  $f_j$  – эквивалентная характеристика ветвей, инцидентных узлу  $j$ , тогда  $p_{jj} = f_j(Q_j)$ . Таким образом, для всех  $j, t = \overline{1, m}$  имеем следующие соотношения для отрезков:

$$p_{jt} = \begin{cases} f_j(Q_j), & j = t; \\ -f_{(jt)}(Q_j), & j \neq t, \quad (j, t) \in I; \\ \infty, & j \neq t, \quad (j, t) \notin I. \end{cases} \quad (9)$$

В частном случае пассивной ГЦ, когда  $f_i(x_i) = s_i |x_i| x_i$ , соотношения (9) имеют конечный вид

$$p_{jt} = \begin{cases} s_j^* Q_j^2 \cdot \text{sign}(Q_j), & j = t; \\ -s_{(jt)} Q_j^2 \cdot \text{sign}(Q_j), & j \neq t, \quad (j, t) \in I; \\ \infty, & j \neq t, \quad (j, t) \notin I. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $s_j^* = \left( \sum_{i \in I_j} \frac{1}{\sqrt{s_i}} \right)^{-2}$  – очевидно, не что иное, как эквивалентное сопротивление

параллельного соединения пассивных ветвей множества  $I_j$ . Для точек пересечения имеет место следующее правило знаков:  $\text{sign}(p_{jj}) = \text{sign}(Q_j)$ ,  $\text{sign}(p_{jt}) = -\text{sign}(Q_j)$ .

**Линеаризация модели узловых давлений.** Наличие соотношений (9) позволяет непосредственно применить подход В.Я. Хасилева к линеаризации (4). Эта линеаризация может быть осуществлена двумя путями, которые неявно присутствуют в этом подходе. Оба приводят к линейным системам уравнений, которые совпадают с (4) в точках пересечения с осями координат, однако, дают отличные решения. Первую систему назовем “моделью секущих”, вторую – “моделью эквивалентных (линейных) замыкающих соотношений”.

*Модель секущих и ее свойства.* Заменим гиперповерхности, задаваемые уравнениями (4), гиперплоскостями, имеющими общие точки пересечения с координатными осями. Уравнения таких плоскостей в отрезках имеют вид

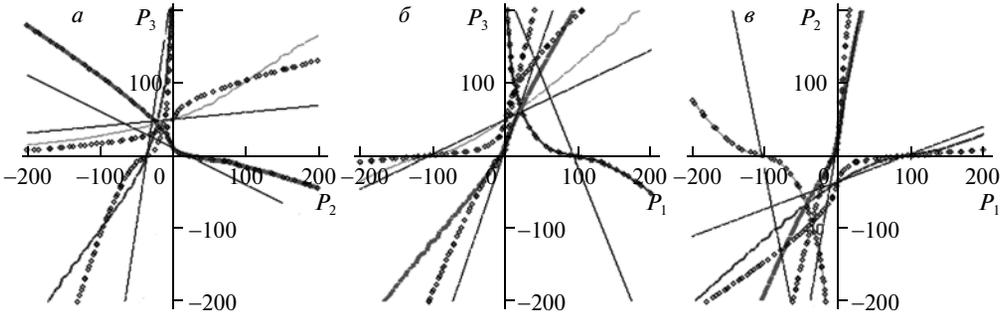


Рис. 3. Сопоставление решений исходной модели (кривые), модели секущих (прямые) и модели эквивалентных замыкающих соотношений (точки) при нулевом давлении в узле: 1 (а), 2 (б), 3 (в)

$$\bar{T}\bar{P} = e, \quad (11)$$

где  $\bar{T}$  –  $(m \times m)$ -матрица с элементами  $\tau_{jt} = p_{jt}^{-1}$ , причем  $\tau_{jt} = 0$  при  $p_{jt} = \infty$ . Эта матрица симметрична по структуре ненулевых элементов, но не симметрична по их значениям, так как в общем случае  $p_{jt} \neq p_{ij}$  для  $j \neq t$ .

В частном случае пассивных ГЦ, как следует из (10), элементы  $j$ -й строки матрицы  $\bar{T}$  имеют общий делитель  $|Q_j|Q_j$ . При этом модель секущих можно представить в эквивалентном виде, но уже с симметричной матрицей коэффициентов –

$$\bar{M}_C \bar{P} = \bar{Q}, \quad (12)$$

где  $\bar{Q}$  – вектор с компонентами  $|Q_j|Q_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $\bar{M}_C$  –  $(m \times m)$ -матрица с элементами

$$m_{jt} = \frac{1}{s_j^*} = \left( \sum_{i \in I_j} \frac{1}{\sqrt{s_i}} \right)^2 \text{ при } j = t \text{ и } m_{jt} = \frac{1}{s_{jt}} \text{ при } j \neq t \text{ для } j, t = \overline{1, m}. \text{ Система (12) (как и}$$

(11)) несовместна, так как  $\sum_{j=1}^m |Q_j|Q_j \neq 0$ . Однозначное решение может быть получено,

если отбросить одно из уравнений и зафиксировать одно из давлений. Однако для разных сочетаний балансирующих и базисных узлов будут разные решения (рис. 3).

Модель эквивалентных линейных замыкающих соотношений для пассивных ГЦ может быть получена из соотношений (10), которые представим в виде

$$w_{jt} = \sqrt{|p_{jt}|} \cdot \text{sign}(p_{jt}) = \begin{cases} \sqrt{s_j^*} Q_j, & j = t; \\ -\sqrt{s_{jt}} Q_j, & j \neq t, \quad (j, t) \in I; \\ \infty, & j \neq t, \quad (j, t) \notin I. \end{cases} \quad (13)$$

Значения  $w_{jt}$  имеют смысл точек пересечения исходной модели с координатами новых переменных  $W_j = \sqrt{|P_j|} \cdot \text{sign}(P_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$ . При этом вместо (12) получим модель

$$\bar{M}_3 \bar{W} = \bar{Q}, \quad (14)$$

где  $\bar{M}_3$  – симметричная матрица с элементами  $m_{jj} = \sum_{i \in I_j} \frac{1}{\sqrt{s_i}}$  на главной диагонали и  $m_{jt} = \frac{1}{\sqrt{s_{(jt)}}}$ ,  $j, t = \bar{1}, m$ ,  $j \neq t$ .

Система (14) совместна, так как  $\sum_{j=1}^m Q_j = 0$ , поэтому ее решение не зависит от сочетания базисного и балансирующего узлов (см. рис. 3). Ей отвечает применение классического метода давлений [3] при линейных замыкающих соотношениях вида  $W_{ni} - W_{ki} = \sqrt{s_i} x_i$ ,  $i = \bar{1}, n$  для модели потокораспределения:  $\bar{A}x = \bar{Q}$ ,  $\bar{A}^T \bar{W} = S^* x$ . Действительно, так как  $x = (S^*)^{-1} \bar{A}^T \bar{W}$ , то исключение вектора  $x$  здесь дает  $\bar{A}(S^*)^{-1} \bar{A}^T \bar{W} = \bar{Q}$ , откуда  $\bar{M}_3 = \bar{A}(S^*)^{-1} \bar{A}^T$ .

Из рис. 3, где дано сравнение рассмотренных моделей для приведенного примера, видно: 1) независимо от выбора базисного узла все три модели имеют общие точки пересечения с осями координат и, соответственно, локализуются в одном и том же квадранте; 2) модель секущих в зависимости от выбора балансирующего узла дает разные решения, которые локализуются в вершинах треугольника, образуемого пересечением секущих (при  $P_1 = 0$  эти вершины близки друг к другу, а при  $P_3 = 0$  – весьма далеки), соответственно, от выбора этого узла зависит точность решения; 3) модель “эквивалентных соотношений” имеет единственное решение, в среднем не хуже, чем модель секущих, причем уравнения “эквивалентных соотношений” и исходной модели для базисного узла совпадают.

Для активных ветвей, когда

$f_i(x_i) = s_i |x_i| x_i - Y_i$  и  $\varphi_i(P_{ni}, P_{ki}) = \sqrt{|P_{ni} - P_{ki} + Y_i|/s_i} \cdot \text{sign}(P_{ni} - P_{ki} + Y_i)$ , вместо (10) имеем

$$p_{jt} = \begin{cases} s_j^* Q_j^2 \cdot \text{sign}(Q_j) - Y_j^*, & j = t, \\ -s_{jt} Q_j^2 \cdot \text{sign}(Q_j) + Y_{jt}, & j \neq t, (j, t) \in I; \\ \infty, & j \neq t, (j, t) \notin I, \end{cases} \quad (15)$$

где  $s_j^*$ ,  $Y_j^*$  – параметры эквивалентной характеристики параллельного соединения ветвей множества  $I_j$ , включая активные. Отсюда видно, что величина  $|Q_j| Q_j$  не выступает в роли общего делителя элементов  $j$ -й строки матрицы  $\bar{T}$ . Соответственно модель (11) нельзя представить в виде (12). Поэтому получение конечного вида эквивалентных замыкающих соотношений для активных ветвей на основе сопоставления решений линейной и нелинейной моделей в рассматриваемом случае (модели узловых давлений) не представляется возможным.

**Метод секущих.** Основная идея предлагаемого метода, который назовем методом секущих модели узловых давлений (МДС), состоит в следующем: 1) пусть имеется некоторое  $k$ -е приближение к решению –  $P^k$ ; 2) перенесем начало координат в точку  $P^k$  и найдем точки пересечения исходной системы (4) с осями этой новой системы координат; 3) составим систему секущих, проходящих через эти точки, решив которую получим вектор поправок  $\Delta P^k$ ; 4) положив  $P^{k+1} = P^k + \Delta P^k$ , повторим пункты 2, 3 до тех пор, пока, например, норма  $\Delta P^k$  не будет пренебрежимо мала.

В рассматриваемом случае модели (4) система секущих имеет вид

$$T^k \Delta P^k = e_{m-1}, \quad (16)$$

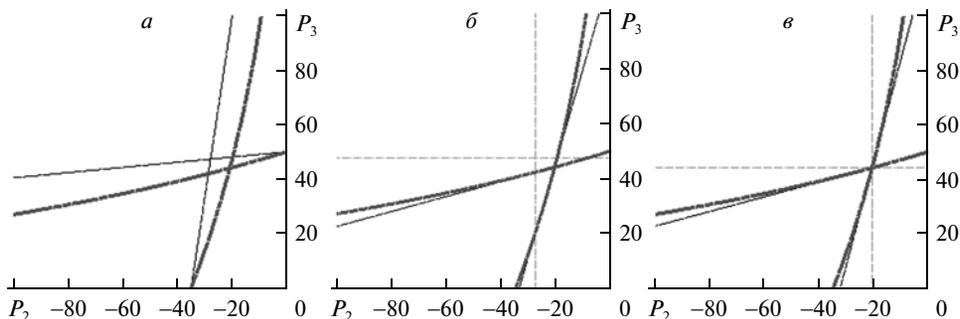


Рис. 4. Иллюстрация процесса итераций: кривые – исходные уравнения; прямые – уравнения секущих; пунктирные – новые оси координат: *а* – итерация 1; *б* – итерация 2; *в* – итерация 3

где  $T^k$  – квадратная матрица порядка  $m - 1$  с элементами  $\tau_{ji}^k = 1/p_{ji}^k$ ;  $p_{ji}^k$  – отрезок, отсекаемый  $j$ -м уравнением на  $t$ -й оси  $k$ -й системы координат с центром в  $P^k$ ;  $e_{m-1}$  –  $(m - 1)$ -мерный единичный вектор. Модели (11) и (16) совпадают при  $P^0 = 0$  и соответствующем выборе базисного и балансирующего узлов. Поэтому на первом шаге точки пересечения в общем случае определяются из (9). Перенос системы координат в точку  $P^k$  означает, что в уравнениях (8) элементами вектора  $\bar{p}_t$  будут  $p_{ji}^k = \text{var}$ ,  $j = t$  и  $p_{jt} = P_j^k = \text{const}$ ,  $j \neq t$ .

Опуская выкладки, связанные с получением конечных выражений для отрезков, проиллюстрируем процесс сходимости этого метода (рис. 4) для того же примера, когда первый узел одновременно является базисным и балансирующим. Видно, что на первой итерации найдено достаточно близкое приближение, на второй – исходные уравнения почти линейны на отрезках между точками пересечения с новыми осями координат, поэтому третья итерация дает почти точное решение.

Как показали результаты расчетов для этого примера, число итераций практически не зависит от сочетания базисного и балансирующего узлов, определяющего близость начального приближения (см. рис. 3) и находится в диапазоне три–пять итераций. Причем точность расчета весьма высока (остаточные невязки узловых расходов не превышают величины  $1 \cdot 10^{-5}$ ). Варьирование разбросом порядков сопротивлений для этой схемы (вплоть до десяти) также не привело к ощутимому росту числа итераций.

Очевидно, что такой процесс можно организовать не только в пространстве узловых давлений, но также, например, в пространстве контурных расходов, что позволяет говорить о целом классе методов (секущих) расчета потокораспределения. Основным недостатком рассмотренного узлового варианта этой схемы – несимметричность матрицы коэффициентов и, соответственно, почти удвоенные затраты на каждую итерацию по отношению к классическому методу давлений. Ниже излагается новый подход, лишенный этого недостатка. Его основная идея состоит в том, чтобы вначале линеаризовать замыкающие соотношения, а затем понизить порядок модели к тому или иному пространству (узловых давлений, контурных расходов и т.д.). Действительно, вся нелинейность рассматриваемых моделей потокораспределения связана с нелинейностью только замыкающих соотношений.

**Линеаризация классических замыкающих соотношений.** Опуская индекс ветви, рассмотрим классическое замыкающее соотношение в двух формах записи:

1) для перепада давлений

$$y + Y - s|x|x| = 0, \quad (17)$$

которое применяется в контурной модели потокораспределения и определено относительно двух переменных  $x, y$ ;

2) для разности давлений

$$P_n - P_k + Y - sx|x| = 0, \quad (18)$$

которое присутствует в модели узловых давлений и связывает три переменные  $P_n, P_k, x$ .

Соответственно можно говорить о двух- и трехточечной линейаризации замыкающих соотношений (законов течения).

*Двухточечная линейаризация.* Для (17) имеют место следующие соотношения для отрезков на осях координат  $(x, y)$ :  $x^t = \sqrt{Y/s}$ ,  $y^t = -Y$ . Линейаризованное соотношение, проходящее точки  $(0, y^t), (x^t, 0)$ , имеет вид

$$y + Y - x\sqrt{sY} = 0. \quad (19)$$

Полученное таким формальным образом соотношение непригодно для пассивных ветвей, когда  $Y = 0$  (не универсально) из-за того, что в этом случае имеется только одна точка пересечения (с началом координат). Возможный вариант обхода этой ситуации – положить в (19)  $Y = 1$  при  $Y = 0$  в (17).

Альтернативным представляется следующий способ. Введем новую переменную  $z = \sqrt{|y|} \cdot \text{sign}(y)$ . Тогда вместо (17) имеем

$$z|z| + Y - sx|x| = 0. \quad (20)$$

Отрезки на осях:  $x^t = \sqrt{Y/s}$ ,  $z^t = -\sqrt{Y}$ . Линейаризованное соотношение

$$z + \sqrt{Y} - x\sqrt{s} = 0. \quad (21)$$

В исходных координатах оно имеет вид  $\sqrt{|y|} \cdot \text{sign}(y) + \sqrt{Y} - x\sqrt{s} = 0$ .

Отметим, что в случае  $Y = 0$  соотношение (21) совпадает с исходным (17). В общем случае  $Y \neq 0$  для всех зависимостей (17), (19)–(21) точки пересечения с осями координат  $x, y$  совпадают.

*Трехточечная линейаризация.* В этом случае аналогами (19), (21) будут

$$P_n - P_k + Y - x\sqrt{Ys} = 0; \quad (22)$$

$$W_n - W_k + \sqrt{Y} - x\sqrt{s} = 0, \quad (23)$$

где  $W_n = \sqrt{|P_n|} \cdot \text{sign}(P_n)$ ,  $W_k = \sqrt{|P_k|} \cdot \text{sign}(P_k)$ .

Полученные соотношения можно применять для отыскания начального приближения в рассматриваемых и в традиционных (ньютоновских) методах расчета потокораспределения. На рис. 5 приведена иллюстрация полученных соотношений для активной ветви: рис. 5а – (17), (19), (21); рис. 5б – (18), (22), (23).

**Общий метод линейаризации замыкающих соотношений.** Изложим технику получения линейаризованных замыкающих соотношений, общность (универсальность) которой состоит в том, что: 1) она не зависит от вида функции  $f(x)$ , к которой предъявляются только традиционные требования монотонности [3]; 2) линейаризация может быть осуществлена относительно произвольной точки, выбранной за начало координат, за исключением точки, уже удовлетворяющей исходному соотношению  $y = f(x)$ ; 3) полученные линейные соотношения имеют типовой вид именно как замыкающие соотношения, поэтому могут быть использованы для линейаризации моделей потокораспределения в любой форме записи (контурной, узловой и т.д.).

*Двухточечная линейаризация.* Перенесем начало координат в произвольную точку  $x^0, y^0$ . Заметим, что если эта точка не удовлетворяет исходному соотношению, то оно будет

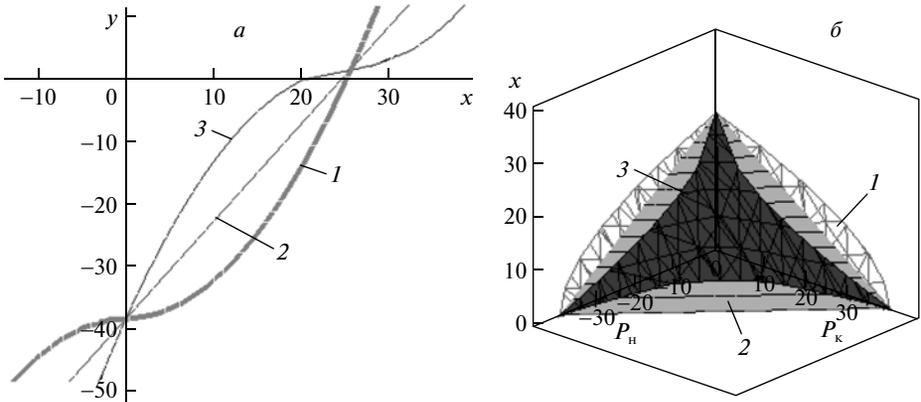


Рис. 5. Варианты линеаризации замыкающих соотношений:

*a* – 2-точечной; *б* – 3-точечной; 1 – исходные соотношения; 2 – линейные; 3 – альтернативные

иметь две точки пересечения с новыми осями координат независимо от типа ветви (пассивная или активная), для случая (17) соответствующие отрезки определяются как

$$x^1 = \sqrt{|y^0 + Y|/s} \cdot \text{sign}(y^0 + Y) = \varphi(y^0) = \varphi^0, \quad y^1 = sx^0|x^0| - Y = f(x^0) = f^0,$$

откуда видно, что  $\varphi^0 \neq 0$  и  $f^0 \neq 0$  при  $Y = 0$  и  $x^0 \neq 0$ ,  $y^0 \neq 0$ .

Из уравнения прямой, проходящей через две точки  $(x_0, y_1), (x_1, y_0)$ , имеем следующее соотношение в поправках  $\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon_x}\right) + \left(\frac{\Delta y}{\varepsilon_y}\right) = 1$ , где  $\Delta x = x - x^0$ ,  $\Delta y = y - y^0$  – поправки;  $\varepsilon_x = \varphi^0 - x^0$ ;  $\varepsilon_y = f^0 - y^0$  – невязки по расходам и перепадам давления. Его можно интерпретировать в форме замыкающих соотношений в поправках

$$\Delta y + \hat{Y} - \hat{s}\Delta x = 0, \tag{24}$$

где  $\hat{Y} = -\varepsilon_y$ ,  $\hat{s} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ . Или – в исходных координатах –

$$y + \tilde{Y} - \hat{s}x = 0, \tag{25}$$

где  $\tilde{Y} = \hat{s}x^0 - f^0$ .

*Трехточечная линеаризация.* Уравнение плоскости, отсекающей те же отрезки на осях координат (с началом в точке  $x^0, P_H^0, P_K^0$ ), что и исходное соотношение, имеет вид

$$\frac{\Delta x}{\varepsilon_x} + \frac{\Delta P_H}{\varepsilon_{PH}} + \frac{\Delta P_K}{\varepsilon_{PK}} = 1, \quad \text{где } \Delta P_H = P_H - P_H^0, \quad \Delta P_K = P_K - P_K^0,$$

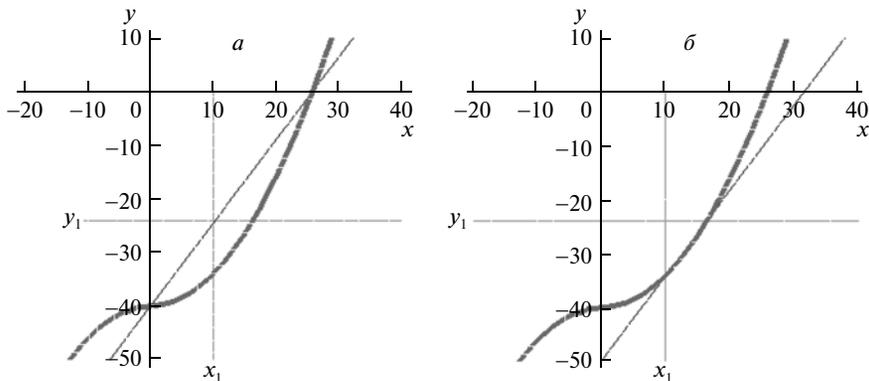
причем,  $\varepsilon_{PH} = -\varepsilon_{PK} = f^0 - (P_y^0 - P_K^0) = f^0 - y^0 = -\varepsilon_y$ .

Отсюда аналогами (24) будут

$$\Delta P_H - \Delta P_K + \hat{Y} - \hat{s}\Delta x = 0; \tag{26}$$

$$P_H - P_K + \tilde{Y} - \hat{s}x = 0. \tag{27}$$

Полученные соотношения можно интерпретировать как уравнения хорд, которые можно применять в процессах последовательной линеаризации исходных замыкаю-



**Рис. 6.** Иллюстрация процесса последовательной линейризации замыкающих соотношений хордами: *a* – начало координат в точке  $(0, 0)$ ; *б* – начало координат в точке  $(x_1, y_1)$

ших соотношений. Пусть, например, имеется двухточечная линейризация, полученная относительно начала координат в нулевой точке (рис. 6а). Пусть также имеется точка  $x^1, y^1$ , удовлетворяющая уравнению хорды и (для убедительности) достаточно удаленная от исходного соотношения. Составим уравнение хорды относительно начала координат в этой точке. Как видно из рис. 6б, это уравнение практически совпадает с исходным на отрезке между точками пересечения с осями новых координат. Остается лишь уточнить – как находить точки, удовлетворяющие уравнениям хорд для ветвей в общем случае многоконтурной ГЦ.

**Метод хорд.** Суть предлагаемого метода, который назовем методом узловых давлений на основе линейризации замыкающих соотношений хордами (МДХ), для определенности будем излагать на базе соотношения в поправках (26), которое для ГЦ в целом имеет вид

$$A^T \Delta P^k = \hat{S}^k \Delta x^k - \hat{Y}^k, \quad (28)$$

где  $k$  – индекс системы координат,  $\hat{S}^k, \hat{Y}^k$  – диагональная матрица и вектор с элементами  $\hat{S}_{ii}^k = \varepsilon_{y_i}^k / \varepsilon_{x_i}^k, \hat{Y}_i^k = \varepsilon_{y_i}^k, i = \overline{1, n}$ . Если (28) разрешить относительно  $\Delta x^k$ , то получим

$$\Delta x^k = (\hat{S}^k)^{-1} A^T \Delta P^k + \varepsilon_X^k, \quad (29)$$

так как  $(\hat{S}^k)^{-1} \hat{Y}^k = \varepsilon_X^k$ , где  $\varepsilon_X^k$  – вектор с элементами  $\varepsilon_{x_i}^k, i = \overline{1, n}$ .

Пусть имеется некоторое приближение  $P^k, x^k$ , где  $x^k$  удовлетворяет первому закону Кирхгофа. При этом

$$A(x^k + \Delta x^k) - Q = A \Delta x^k = 0. \quad (30)$$

Используя (29) для исключения  $\Delta x^k$  из (30), получим

$$A(\hat{S}^k)^{-1} A^T \Delta P^k = -\delta_Q^k, \quad (31)$$

где  $\delta_Q^k = A \varepsilon_X^k - (m - 1)$ -мерный вектор невязок узловых расходов. Решив систему (31) относительно  $\Delta P^k$ , обратной подстановкой определим  $\Delta x^k$ . Полагая  $P^{k+1} = P^k + \Delta P^k, x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ , получим новую систему координат для последующей линейризации, причем  $x^{k+1}$  вновь будет удовлетворять первому закону Кирхгофа. За условие останова

такого итерационного процесса можно принять  $\max_i |\varepsilon_{X_i}^k| < \delta_x$ , где  $\delta_x$  – допустимая невязка.

Полученная система (31) практически полностью совпадает с той, что используется в классическом методе давлений [3]. Последний в рассматриваемом контексте можно рассматривать как метод одноточечной линеаризации на основе привлечения производных. Матрица коэффициентов здесь также симметричная, а затраты на одну итерацию – сопоставимы. Основное отличие – вместо диагональной матрицы производных  $(f_x^*)^k$  используется  $\hat{S}^k$ , которую можно интерпретировать как матрицу производных, но вычисленных разностным способом.

Начальное приближение можно получить любым из рассмотренных способов линеаризации замыкающих соотношений (22), (23). В случае (22) последовательно применяются уравнения

$$ADA^T P^0 = Q - Ag, \quad x^0 = DA^T P^0 + g, \quad (32)$$

где  $D$  – диагональная матрица порядка  $n$  с элементами  $1/\sqrt{s_i Y_i}$  для активных ветвей и  $1/\sqrt{s_i}$  для пассивных;  $g = (S^*)^{-1} Y^* - n$ -мерный вектор с элементами  $\sqrt{Y_i/s_i}$ . В случае (22) –

$$A(S^*)^{-1} A^T W^0 = Q - Ag; \quad x^0 = (S^*)^{-1} A^T W^0 + g; \quad P^0 = D_W^0 W^0, \quad (33)$$

где  $D_W^0 = \text{diag}(|w_1^0|, |w_2^0|, \dots, |w_n^0|)$ .

Очевидно, что рассмотренный принцип адаптивной линеаризации моделей потокораспределения хордами для замыкающих соотношений можно применить в сочетании с известными способами понижения их порядка к пространству контурных переменных. В результате получим МКРХ.

На рис. 7 показаны траектории поиска решения (а) и процесса сходимости (б) МДХ для сквозного примера ГЦ (см. рис. 1), когда третий узел одновременно является базисным и балансирующим (линейно зависимым). В данном случае разделение базисного и балансирующего узлов нецелесообразно (приводит к нарушению симметричности матрицы коэффициентов), а выбор линейно зависимого узла практически не сказывается на числе итераций. На этом рисунке представлены два случая, отличающиеся способом получения начального приближения, соответственно, по формулам (32) – МДХ1 и (33) – МДХ2. Видно, что в первом случае траектория извилистая (начальные давления далеки от начала координат). Во втором – эта траектория лежит практически на прямой линии от нуля до точки решения (начальная точка вблизи начала координат). Однако, в обоих случаях (как видно из рис. 7б) сходимость монотонная, а ее скорость возрастает по мере приближения к решению. Решение с приемлемой точностью получается за две–три итерации, причем, за три–четыре итерации можно получить решение с очень высокой точностью  $\delta_x = 1 \cdot 10^{-6} \div 1 \cdot 10^{-8}$ . Таким образом, показатели сходимости и точности МДХ не уступают МДС. Отметим также, что эти показатели практически не изменяются, если в рассматриваемой ГЦ все ветви сделать активными. Причем в этом случае применение МДХ2 несколько предпочтительнее.

**Сравнение с другими методами.** Проведем сравнение предлагаемых методов на тестовом примере из работы [4], где на нем выполнено сопоставление наиболее распространенных за рубежом методов расчета потокораспределения в водопроводных сетях. Сравниваются пять методов:  $G$  – метод “глобального градиента” (“Newton–Raphson Global algorithm” [5]);  $LT$  – метод “линейной теории” (“Linear Theory algorithm” [6]);  $L$  – метод контурных расходов (“Newton–Raphson Loop algorithm” [7, 8]);  $H$  – метод узловых давлений (“Newton Raphson Nodal algorithm” [9–11]);  $H^*$  – модифицированный метод узловых давлений (“modified  $H$ ”) [10, 11].

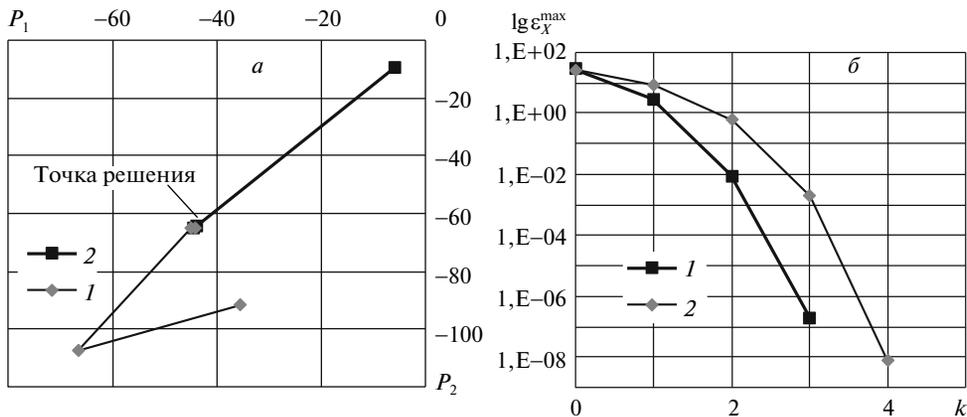


Рис. 7. Траектория (а) и сходимость (б) процесса поиска решения по: 1 – МДХ1; 2 – МДХ2

На рис. 8 приведена расчетная схема тестовой сети, а в таблице – информация о ее параметрах и потокораспределении. Узел 0 взят как линейно зависимый, а все ветви – пассивные с квадратичным законом сопротивления.

Сравнение методов в [4] проводилось на основе генерации (с помощью датчика случайных чисел) 100 случайных вариантов начальных приближений с центром в истинном решении и в диапазоне  $\pm 50$  м вод. ст. для узловых давлений. К сожалению, не отмечено, с какой точностью выполнялись расчеты. Тестирование показало [4]: методы  $G$ ,  $LT$  и  $L$  дали примерно одинаковые результаты – от 5 до 7 (а в среднем 6) итераций; метод  $H$  – от 15 до 110; метод  $H^*$  – от 22 до 25. Комментируется, что затраты на одну итерацию у разных методов различны, при использовании контурных уравнений они выше, чем в случае решения задачи на базе узловых моделей.

На рис. 9 приведены графики процесса сходимости: а) МДС, МДХ1 и МДХ2 в сопоставимых условиях изменения евклидовой нормы вектора узловых небалансов  $\|\epsilon_Q^k\|_2$  по итерациям; б) МДХ1, МДХ2 относительно изменения  $\max_i |\epsilon_{X,i}^k|$  для сравнения с предыдущим примером (см. рис. 7). Приведем комментарии: 1) во всех предлагаемых методах проблема выбора начального приближения формализована, поэтому нет необходимости их тестирования; 2) для получения решения с очень высокой точностью потребовалось три–четыре итерации; 3) для получения решения по МДХ с приемлемой для практики точностью 0,01 л/с достаточно две–три итерации; 4) некоторое пре-

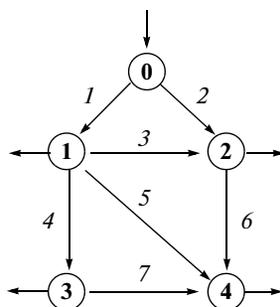


Рис. 8. Схема тестовой сети

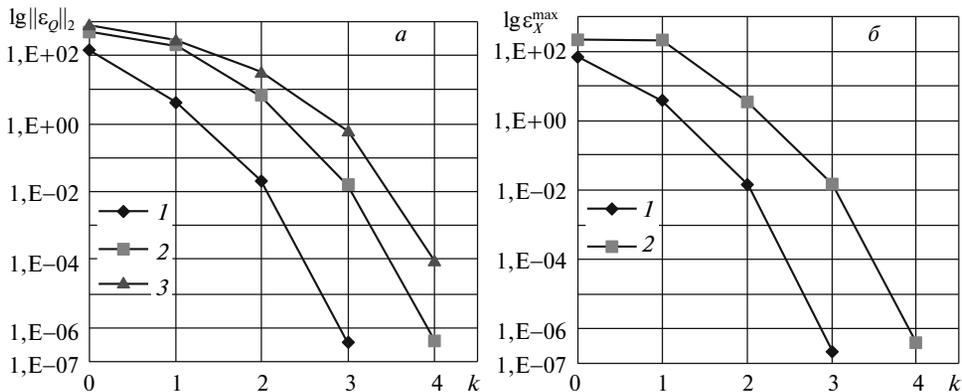


Рис. 9. Иллюстрация процесса сходимости методов: 1 – МДХ1; 2 – МДХ2; 3 – МДС

Данные по тестовой схеме для сравнения методов

Ветвь ( $i$ )	Расход ( $x_i$ , л/сек)	Перепад давления ( $y_i$ , м вод. ст.)	Сопроотивление ( $s_i$ )	Узел ( $j$ )	Расход ( $Q_j$ , л/сек)	Давление ( $P_j$ , м вод. ст.)
1	800	1	$1,5625 \cdot 10^{-6}$	0	1000	100
2	200	2	$0,5 \cdot 10^{-4}$	1	-100	99
3	100	1	$1,0 \cdot 10^{-4}$	2	-200	98
4	400	2	$0,125 \cdot 10^{-4}$	3	-300	97
5	200	3	$0,75 \cdot 10^{-4}$	4	-400	96
6	100	2	$2,0 \cdot 10^{-4}$			
7	100	1	$1,0 \cdot 10^{-4}$			

имущество МДХ1 над МДХ2 связано с тем, что рассматриваемая сеть пассивная, при наличии активных ветвей ситуация может измениться.

**Выводы.** 1. Впервые выполнено исследование узловой модели потокораспределения в ГЦ с сосредоточенными параметрами, применимости метода В.Я. Хасилева для линейаризации, который в терминологии данной статьи можно интерпретировать как замену модели потокораспределения моделью секущих относительно начала координатного пространства. Это исследование показало принципиальную возможность такой аппроксимации, а для пассивных ГЦ получены конечные выражения для модели секущих в терминах эквивалентных параметров ГЦ.

2. Предложена новая вычислительная схема расчета потокораспределения, состоящая в последовательном уточнении модели секущих за счет смещения начала координат в точку предыдущего решения по такой модели. Эта схема может быть положена в основу разработки целого класса методов расчета потокораспределения – методов секущих. Рассмотрено содержание и особенности метода секущих в пространстве узловых давлений.

3. Предложен новый метод линейаризации разнотипных замыкающих соотношений хордами относительно произвольного начала координат, обеспечивающий типовой вид получаемых линейных замыкающих соотношений. Обеспечена возможность линейаризации моделей потокораспределения в любой форме записи (контурной, узло-

вой и т.д.) и разработки целой серии новых методов расчета потокораспределения — методов хорд.

4. Разработан новый метод узловых давлений. Метод не уступает по сходимости методу секущих классическому (ньютонovскому) методу давлений, но требует меньших вычислительных затрат на одну итерацию по отношению к методу секущих и одинаковых затрат с методом давлений. Дополнительные характеристики метода: не требуется знание производных; отсутствует проблема начального приближения; учитываются случаи задания давления более чем в одном узле и наличия автоматических регуляторов (расхода, давления и др.) [12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасилев В.Я.* Линейные и линеаризованные преобразования схем гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1964. № 2. С. 231–243.
2. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1964. № 1. С. 69–88.
3. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 278 с.
4. *Todini E.* A unifying view on the different looped pipe network analysis algorithms / In Powell R. and Hindi K.S. (eds). Computing and Control for the water Industry. Research Studies Press Ltd, 1999. P. 63–80.
5. *Todini E., Pilati S.* A gradient method for the solution of looped pipe networks. Computer Applications in Water Supply. V. 1 (System analysis and simulation). John Wiley & Sons, 1987. P. 1–20.
6. *Wood D.J., Charles C.O.A.* Hydraulic network analysis using linear theory // Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 1972. V. 98. № HY7.
7. *Epp R., Fowler A.G.* Efficient Code for steady-state flows in networks // Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 1970. V. 96. № HY1.
8. *Kesavan H.K., Chandrashekar M.* Graph-theoretic models for pipe network analysis // Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 1972. V. 98.
9. *Martin D.W., Peters G.* The application of Newton's method to network analysis by digital computer // IWES Journal. 1963.
10. *Shamir U., Howard C.D.D.* Water distribution network analysis // Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 1968. V. 94. № HY1.
11. *Mignosa P.* Sui problemi di verifica delle reti di distribuzione idrica complesse // Idrotecnica. 1987. № 2. P. 257–273.
12. *Новицкий Н.Н., Токарев В.В.* Релейная методика расчета потокораспределения в гидравлических цепях с регулируемыми параметрами // Изв. РАН. Энергетика. 2001. № 2. С. 88–98.

Поступила в редакцию  
29.V.2013